# 代数群的基本概念

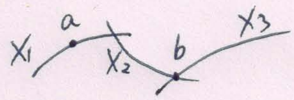
设 $k=\bar{k}$ 为代数闭域.

若 $G$ 为 variety, 同时也是群, 并且乘法映射 $G\times G\to G$ 和求逆映射 $\begin{matrix} G \to G \\ x \mapsto x^{-1}\end{matrix}$ 均为簇的态射, 则称 $G$ 为代数群.

练习1: $\forall g\in G$, 平移态射 $g\cdot:\ \begin{matrix} G \to G \\ x \mapsto g\cdot x\end{matrix}$ 为同构

练习2: 设 $G=X_1\cup\cdots\cup X_n$ 为不可约分解, 则 $\forall i\neq j$. $X_i\cap X_j=\emptyset$.

(提示: 由练习1知 $G$ 中任意两点附近的形态均同构. 故不会出现下面的图像 过 $a$ 点只有一个分支, 而过 $b$ 点有两个)




练习3: 设 $G$ 的包含单位元 $e$ 的不可约分支 (由练习2, 也是连通分支) 为 $G^\circ$. 则 $G^\circ$ 为 $G$ 的正规子群.

若 $H\leq G$ 为 $G$ 的子群, 同时也为闭子簇, 则称为 $G$ 的闭子群.

定义: 若 $H\leq G$ 为 $G$ 的子群, 同时也为开子簇, 则称为 $G$ 的开子群.

易见闭、开子群均为代数群.

若 $G=G^\circ$, 则称 $G$ 为连通代数群.

练习3: 证明若 $G=G^\circ\cup a_1G^\circ\cup\cdots\cup a_nG^\circ$ 为 $G$ 相对于 $G^\circ$ 的陪集分解, 则也为不可约分解.

练习4: 若 $H\leq G$ 为 $G$ 的开子群, 则 $H$ 也为 $G$ 的闭子群. 特别地, 若 $G$ 连通, 则 $H=G$.

提示: 考虑 $G$ 相对于 $H$ 的陪集分解.

练习5：设 $V\subset G$ 为 $G$ 中开子集，且 $e\in V$，以及 $V^{-1}=V$，即 $\forall x\in V$，$x^{-1}\in V$，并且设 $G$ 连通.

令 $H=\bigcup_{n=0}^{\infty}V^n$，其中 $V^0:=\{e\}$，$V^n$ 为乘法映射 $\underbrace{V\times\cdots\times V}_{n个}\longrightarrow G$ 的像，$\forall n\geq 1$.

证明：$H\leq G$ 为 $G$ 的开子群，从而 $H=G$.（$G$可由单位元的开邻域生成）

定义：设 $G_1$，$G_2$ 均为代数群，$\varphi: G_1\to G_2$ 称为代数群同态，如果 $\varphi$ 既是群同态，又是代数簇之间态射.

练习6：设 $G_1\xrightarrow{\varphi}G_2$ 为代数群同态. 证明 $\overline{\varphi(G_1)}$ 为 $G_2$ 的闭子群.

练习7：设 $F\subset X$ 为 pre-variety $X$ 中的非空可构造子集. 证明存在 $\overline{F}$ ~~中~~的开子集 $U$，使得 $U\neq\emptyset$，且 $U\subset F$.

练习8：设 $G_1\xrightarrow{\varphi}G_2$ 为 dominant的 代数群同态，且$G_2$连通. 利用Chevalley定理和练习7，证明存在 $G_2$ 中开集 $U\neq\emptyset$，使得 $U\subset\varphi(G_1)$，进而利用一个平移以及考虑 $V\cap V^{-1}$，证明还可要求 $e\in U$，$U=U^{-1}$. 从而利用练习5，练习4，证明 $\varphi(G_1)=G_2$.

练习9：设 $G_1\xrightarrow{\varphi}G_2$ 为代数群同态. 证明 $\varphi(G_1)$ 为 $G_2$ 的闭子群.

注：代数群的例子：$GL(n,k)$，$SL(n,k)$，以及它们中的闭子群. 如上三角可逆阵形成的群等.

注：练习9的整个证明中只用到 $G$ 为 pre-variety，没有用到其分离性. 定义中要求其为 variety 是考虑到一般的情况遇到的均为 variety.